

DIE WÄRMELEITFÄHIGKEIT VON FLÜSSIGKEITEN II

DER STRAHLUNGSANTEIL DER EFFEKTIVEN WÄRMELEITFÄHIGKEIT

H. POLTZ

Braunschweig

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Bundesanstalt)

(Eingegangen 24. August 1964)

Zusammenfassung—Der Anteil der Strahlung am Wärmetransport durch ein absorbierendes Medium, das sich zwischen zwei emittierenden und reflektierenden parallelen Platten befindet, ist durch den Mittelwert der durch Strahlung bewirkten Wärmeströmung zwischen den Plattenoberflächen gegeben. Dieser Anteil wurde für Bedingungen berechnet, wie sie im allgemeinen bei Messungen der Wärmeleitfähigkeit von Flüssigkeiten im stationären Zustand bei nicht extremen Temperaturen vorliegen. Der Beitrag der Strahlung kann bei Raumtemperatur selbst bei sehr schwach emittierenden Plattenoberflächen einige Prozente des gesamten Wärmetransports betragen. Dies wurde für Toluol mit Hilfe der Auswertung eines gemessenen Diagramms der Infrarot-Absorption dieser Flüssigkeit gezeigt.

FORMELZEICHEN			
$c_1, c_2,$	Konstanten der Planck'schen Funktion;	$s_0,$	Dicke der Flüssigkeitsschicht (= Plattenabstand);
$E_r, E_{r1}, E_{r2},$	Planck'sche Funktionen für die Temperaturen T, T_1, T_2 ;	$T,$	Temperatur in der Schicht;
$k,$	wahre Wärmeleitfähigkeit;	$T_1, T_2,$	Temperaturen der Plattenoberflächen;
$k_r,$	Strahlungsleitfähigkeit;	$\Delta T,$	Differenz $T_1 - T_2$;
$k_{\text{eff}},$	effektive Wärmeleitfähigkeit;	$v,$	dimensionslose Koordinate (optische Distanz);
$K_n(\tau),$	durch (17) definierte Funktionen;	$x,$	$\cos \vartheta$;
$n,$	Brechungszahl;	$Y, Y',$	durch (16) und (24) definierte Funktionen;
$P_1, P_2,$	durch (21) und (22) definierte Funktionen;	$Y^*, Y'^*,$	durch (17) und (25) definierte Funktionen;
$Q(Q'),$	gesamte Wärmeströmung durch eine Ebene im Medium parallel zu den Platten;	$z,$	Koordinate (entspricht s);
$Q_c,$	durch Leitung bewirkter Anteil von $Q(Q')$;	$\alpha,$	Temperaturkoeffizient der Wärmeleitfähigkeit;
$Q_r(Q'_r),$	durch Strahlung bewirkter Anteil von Q ;	$\epsilon, \epsilon_1, \epsilon_2,$	Emissionsgrade der Plattenoberflächen;
Q_{r1}, Q_{r2}, Q_{r3}	$(Q'_{r3}), Q_{r4}(Q'_{r4}),$ Glieder von $Q_r(Q'_r)$;	$\zeta,$	Koordinate;
$\bar{Q}_c, \bar{Q}_r(\bar{Q}'_r),$	Mittelwerte von Q_c und $Q_r(Q'_r)$ gebildet über den Plattenabstand;	$\eta = \kappa \zeta,$	dimensionslose Koordinate;
$s,$	Abstand von der wärmeren Platte bis zu einer Ebene in der Schicht;	$\vartheta,$	Winkel zwischen der einfallenden Strahlung und dem Lot auf die Testebene;
		$\kappa,$	Absorptions-Koeffizient für monochromatische Strahlung;
		$\bar{\kappa},$	effektiver Mittelwert des Absorptionskoeffizienten;

λ ,	Wellenlänge der Wärmestrahlung;
σ ,	Strahlungskonstante;
$\tau = \kappa s_0$,	optische Dicke der Flüssigkeitsschicht (dimensionslos).

1. PROBLEMSTELLUNG

DIE NACHFOLGENDE Untersuchung wurde durchgeführt, weil wir bei Messungen mit einer Parallelplatten-Apparatur mit Schutzring bei Flüssigkeiten mit relativ schwacher Ultrarot-Absorption—und nur bei diesen—bereits im Bereich kleiner Schichtdicken einen Anstieg der Wärmeleitfähigkeit mit der Schichtdicke fanden, der sich nicht durch andere Ursachen, wie z.B. Konvektion oder Wärmeverluste, erklären liess. Über die experimentelle Arbeit wird demnächst in dieser Zeitschrift berichtet werden.

Es gibt bereits zahlreiche Untersuchungen, die zeigen, dass der Beitrag der Strahlung zum Wärmetransport auch in festen und flüssigen Körpern beträchtlich sein kann. Die Transportgleichung für den allgemeinen Fall konnte meines Wissens bisher noch nicht gelöst werden, doch existieren Lösungen für spezielle Fälle sowie unter Benutzung vereinfachender Annahmen (siehe z.B. [1] bis [4]). Besonders eingehend wurde der Strahlungseinfluss bei den beiden Stofftypen der porösen und Hohlräume enthaltenden geschichteten Stoffe ([5] bis [9]) und der geschmolzenen Glasmassen ([10] bis [13]) untersucht. Bei den ersteren kann der relative Beitrag der Strahlung zum Wärmetransport wegen der geringen Wärmeleitfähigkeit und oft verhältnismässig hohen Durchlässigkeit für Strahlung beträchtlich sein. Bei den Glasmassen kann der Strahlungsanteil den Leitungsanteil infolge der hohen Temperaturen sogar stark überwiegen.

Bereits M. F. Dick und D. W. McCready [14] fanden bei Messungen der Wärmeleitfähigkeit von organischen Flüssigkeiten bei 60°C einen Anstieg der Messwerte mit der Schichtdicke, und in der Diskussion wurde insbesondere von C. F. Bonilla zum Ausdruck gebracht, dass es sich hierbei vermutlich um einen Strahlungseinfluss handele. Wenn dies zutrifft, ist zu erwarten, dass die bisher gemessenen Wärmeleitfähigkeitskoeffizienten der schwach absorbierenden organischen Flüssigkeiten gegenüber den wirklichen Stoffwerten um einige Prozent zu hoch sind und

von der Messanordnung abhängen. Wegen des starken Anstiegs der Strahlung mit der Temperatur ist insbesondere auch ein erheblicher Einfluss der gewählten Schichtdicke auf den Wert des gemessenen Temperaturkoeffizienten zu erwarten.

2. BENUTZTES MODELL UND DEFINITION DES STRAHLUNGSANTEILS

Zwischen zwei in beiden Richtungen unendlich ausgedehnten parallelen Platten mit den absoluten Temperaturen T_1 und T_2 und dem Abstand s_0 , deren Oberflächen graue Strahler mit dem Emissionsgrad ϵ seien, befinde sich ein homogenes Medium mit der wahren Wärmeleitfähigkeit k , dem von der Wellenlänge λ der Strahlung abhängigen Absorptions-Koeffizienten $\kappa(\lambda)$ und der Brechungszahl n , die zur Vereinfachung als von der Wellenlänge unabhängig angenommen werden soll.

Sind Q der gesamte Wärmestrom, Q_c und Q_r seine durch Leitung und Strahlung bewirkten Anteile durch die Flächeneinheit irgendeiner der parallel zu den Plattenoberflächen verlaufenden Isothermenebenen, so gilt im stationären Zustand unabhängig von der Lage der Isothermenebene:

$$Q = Q_c + Q_r = \text{const.} \quad (1)$$

Dabei ist vorausgesetzt, dass keine Konvektion vorhanden ist.

In Abb. 1 stellt die gerade Linie a den Temperaturverlauf zwischen den Platten für den Fall $Q_r = 0$ dar, d.h. bei ausschliesslichem Wärmetransport durch Leitung. Kurve b zeigt qualitativ den Verlauf der Temperatur zwischen den Platten bei gleichzeitigem Transport durch Leitung und Strahlung, wie aus früheren Arbeiten entnommen werden kann (siehe z.B. [2] und [3]).

Da der Leitungsanteil Q_c überall proportional dem Temperaturgefälle ist, folgt aus Kurve b , dass Q_c in der Randzone an den Platten bei Vorhandensein eines Strahlungsanteils stets grösser ist als im mittleren Bereich zwischen den Platten. Daher muss wegen (1) der Strahlungsanteil umgekehrt in der Nähe der Platten stets kleiner sein als im mittleren Bereich der Schicht. Das Glied Q_c in (1) nimmt also vom Rand bis zur Mitte der Schicht ab und Q_r

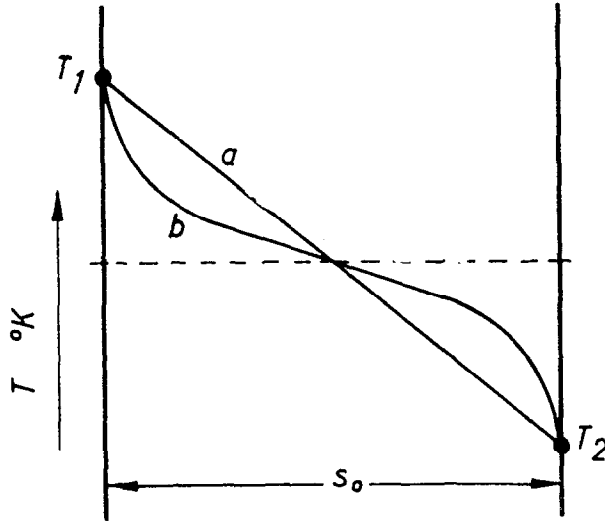


Abb. 1. Temperaturverlauf zwischen den Platten.

wächst dabei so, dass die Summe stets unverändert bleibt.

Ersetzt man in (1) Q_c durch die eben schon benutzte Beziehung:

$$Q_c = -k \frac{dT}{ds} \quad (2)$$

und integriert (1) über s von 0 bis s_0 , so erhält man nach Division durch s_0 für die so gebildeten Mittelwerte \bar{Q}_c und \bar{Q}_r des Leitungs- und Strahlungsanteils, wenn $T_1 - T_2 = \Delta T$ gesetzt wird:

$$\begin{aligned} Q = \bar{Q}_c + \bar{Q}_r &= -\frac{k}{s_0} \int_0^{s_0} \frac{dT}{ds} ds + \frac{1}{s_0} \int_0^{s_0} Q_r ds \\ &= \frac{k}{s_0} \Delta T + \frac{1}{s_0} \int_0^{s_0} Q_r ds \quad (3) \end{aligned}$$

Man sieht, dass das erste Glied der rechten Seite, das den durch Leitung bewirkten Wärmetransport darstellt, nur von der Temperaturdifferenz zwischen den Platten und ihrem Abstand abhängt. Sind diese Werte vorgegeben, so ist also auch der Leitungsanteil gegeben, ganz unabhängig von der Grösse des Strahlungsanteils.

Hieraus folgt, dass der Strahlungsanteil des

Wärmetransports von Platte zu Platte definiert werden muss durch

$$\bar{Q}_r = \frac{1}{s_0} \int_0^{s_0} Q_r ds = Q - \frac{k}{s_0} \Delta T \quad (4)$$

Diese hier für das Plattenmodell gefolgerte Definition kann auch für den allgemeinen Fall formuliert werden.

Nach den oben aus der Gestalt der Kurve b gezogenen Schlüssen ergibt sich, dass der Strahlungsanteil \bar{Q}_r stets grösser sein muss als die durch Strahlungsaustausch von der wärmeren Platte in die Flüssigkeit eintretende Wärmeströmung.

3. BERECHNUNG DES STRAHLUNGSANTEILS

Wie Abb. 2 veranschaulicht, gelangt nach dem Kirchhoff'schen Gesetz von der Emission, die von einer im Abstände ζ von der linken (wärmeren) Platte befindlichen Flüssigkeitlamelle von der Dicke $d\zeta$ ausgeht, zur Flächeneinheit einer Testebene bei z im kegelförmigen Winkelbereich zwischen ϑ und $\vartheta + d\vartheta$ und im Wellenlängenbereich von λ bis $\lambda + d\lambda$ der Strahlungsstrom

$$\begin{aligned} dQ_r &= 2\pi n^2 E_r \frac{\kappa(\lambda)}{\cos \vartheta} \exp \left[\frac{-(z - \zeta)\kappa(\lambda)}{\cos \vartheta} \right] \\ &\times \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta d\zeta d\lambda \quad (5) \end{aligned}$$

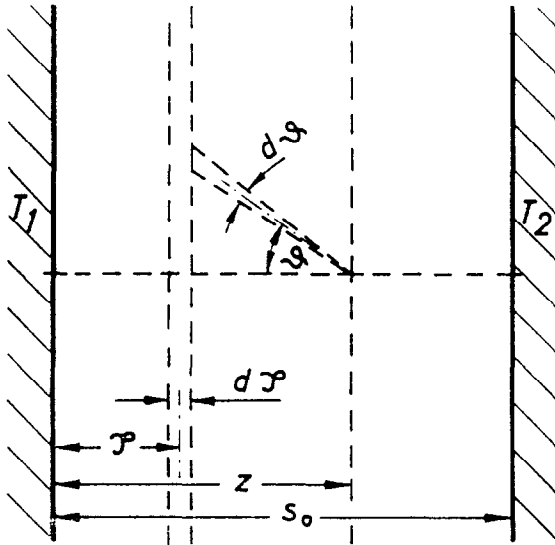


ABB. 2. Koordinatenschema.

E_r ist die Planck'sche Strahlungsfunktion für unpolarisiertes Licht:

$$E_r[\lambda, T(\zeta)] = 2c_1 \frac{\lambda^{-5}}{\exp(c_2/T\lambda) - 1} \quad (6)$$

Wird $\kappa(\lambda)$ kurz κ geschrieben und werden anstelle der Grössen s_0, z und ζ die folgenden—im allgemeinen Fall von λ abhängigen—dimensionslosen "optischen" Längen eingeführt:

$$\left. \begin{aligned} \tau &= \kappa s_0 && \text{optische Dicke der Flüssigkeitsschicht} \\ v &= \kappa z && \text{optische Abstände von der} \\ \eta &= \kappa \zeta && \text{wärmeren Platte} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

und wird ferner $x = \cos \vartheta$ gesetzt, so ergibt sich durch Integration von (5) für die aus der ganzen links von z gelegenen Flüssigkeitsschicht nach der Ebene bei z gelangenden Strahlungsströmung:

$$Q_{r3} = 2\pi n^2(1 - \epsilon) \int_{\lambda=0}^{\infty} \int_{\eta=0}^{\tau} E_r \int_{x=0}^1 \frac{\exp\left(-\frac{\eta+v}{x}\right) - \exp\left(-\frac{2\tau-\eta-v}{x}\right) - (1-\epsilon) \left[\exp\left(-\frac{2\tau+\eta-v}{x}\right) - \exp\left(-\frac{2\tau-\eta+v}{x}\right) \right]}{1 - (1-\epsilon)^2 \exp(-2\tau/x)} \times dx d\eta d\lambda \quad (10)$$

$$Q_{r1} = 2\pi n^2 \int_{\lambda=0}^{\infty} \int_{\eta=0}^v E_r \int_{x=0}^1 \exp\left(-\frac{v-\eta}{x}\right) dx d\eta d\lambda \quad (8)$$

Entsprechend kommt aus der ganzen Schicht rechts von z :

$$Q_{r2} = -2\pi n^2 \int_{\lambda=0}^{\infty} \int_{\eta=v}^{\tau} E_r \int_{x=0}^1 \exp\left(-\frac{\eta-v}{x}\right) dx d\eta d\lambda \quad (9)$$

Die Ebene bei z erreichen ausserdem noch Anteile der von der Flüssigkeitsschicht emittierten Strahlung, die an den Plattenoberflächen einmal oder mehrfach reflektiert wurden. Bei jeder Reflexion werden sie auf den Anteil $1 - \epsilon$ reduziert. Bei diesem Vorgang sind die beiden Fälle spiegelnder und diffuser Reflexion zu unterscheiden. Die Berechnung wird hier für beide Fälle durchgeführt. Nach der üblichen Konstruktion der Messgeräte wird man in der Regel das Vorliegen spiegelnder Reflexion annehmen können.

3.1 Spiegelnde Reflexion

Als Beitrag der in alle Richtungen strahlenden Flüssigkeitsschicht erhält man aus (5) für den infolge regulärer Reflexionen an den Plattenoberflächen nach z gelangenden Anteil einen Ausdruck von vier Gliedern, die alle einen Faktor in der Form der geometrischen Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (1 - \epsilon)^{2\nu} \exp\left(-2\nu \frac{\tau}{x}\right)$$

enthalten. Nach Summation dieser Reihe erhält man für diesen Anteil:

Als letzter Anteil der durch Strahlung bewirkten Wärmeströmung kommt schliesslich noch der durch Emission der Plattenoberflächen bewirkte Beitrag hinzu, der einschliesslich der reflektierten Anteile in entsprechender Weise berechnet werden kann. Man erhält:

$$Q_{r4} = 2\pi n^2 \epsilon \int_{\lambda=0}^{\infty} \int_{x=0}^l \frac{E_{r1} \exp\left(-\frac{v}{x}\right) - E_{r2} \exp\left(-\frac{\tau-v}{x}\right) - (1-\epsilon) \left[E_{r1} \exp\left(-\frac{2\tau-v}{x}\right) - E_{r2} \exp\left(-\frac{\tau+v}{x}\right) \right]}{1 - (1-\epsilon)^2 \exp(-2\tau/x)} \times x \, dx \, d\lambda \quad (11)$$

Darin bedeuten E_{r1} und E_{r2} die den Plattentemperaturen T_1 und T_2 entsprechenden Planck'schen Strahlungsfunktionen (6).

Die resultierende durch Strahlung verursachte Wärmeströmung durch die Ebene bei z setzt sich aus den Anteilen (8), (9), (10) und (11) zusammen:

$$Q_r = Q_{r1} + Q_{r2} + Q_{r3} + Q_{r4} \quad (12)$$

Zur Lösung des allgemeinen Falles muss der Ausdruck für Q_r aus (12) in (4) eingesetzt und dann aus (4) T als Funktion von s bestimmt werden. Für unser spezielles Problem ist jedoch die Einführung einiger Vereinfachungen zulässig.

Bei Wärmeleitfähigkeitsmessungen ist die Temperaturdifferenz zwischen den Platten—zum mindesten, wenn nicht bei sehr niedrigen Temperaturen gemessen wird—im allgemeinen klein gegenüber den absoluten Temperaturen. Es gilt also:

$$T_1 - T_2 \equiv \Delta T \ll T_2 < T_1 \quad (13)$$

Ferner ist bekannt, dass für den Temperaturbereich, der für die hier in erster Linie interessierenden organischen Flüssigkeiten darstellbar ist, der Leitungsanteil des Wärmetransports den Strahlungsanteil stark überwiegt. Nach dem zu Abb. 1 Gesagten folgt daraus ein fast linearer Temperaturabfall zwischen den Platten. Wie wir sahen, hat die Abweichung von der Linearität auf den Betrag des Leitungsanteils überhaupt keinen Einfluss, sondern nur auf den viel kleineren Strahlungsanteil. Da dieser sich wegen seines geringen Betrages ohnehin nicht mit grosser Genauigkeit messen lässt, entsteht in der Berechnung nur ein unmessbar kleiner Fehler

durch die vereinfachende Annahme, dass der Temperaturabfall zwischen den Platten genau linear ist.

Dann lässt sich unter Berücksichtigung von (13) näherungsweise schreiben:

$$\left. \begin{aligned} T(\xi) &= T_1 - \Delta T \eta / \tau \\ T^4(\xi) &= T_1^4 - 4T_1^3 \Delta T \eta / \tau \\ T_2^4 &= T_1^4 - 4T_1^3 \Delta T \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Zur weiteren Vereinfachung der Berechnung soll anstelle des von der Wellenlänge abhängenden Absorptions-Koeffizienten κ ein konstanter effektiver Mittelwert $\bar{\kappa}$ eingeführt werden. Man denke sich $\bar{\kappa}$ so gewählt, dass ein durch Messungen gefundener Strahlungsanteil mit diesem Wert möglichst gut dargestellt werden kann. Es ist klar, dass $\bar{\kappa}$ dann auch durch andere Vereinfachungen beeinflusst wird, z.B. durch den gewählten konstanten Wert für die Brechungszahl n . Aus Wärmeleitfähigkeitsmessungen bestimmte Werte für $\bar{\kappa}$ werden in dem demnächst erscheinenden experimentellen Teil gebracht. Hier wird an späterer Stelle für ein Beispiel ein Näherungswert für $\bar{\kappa}$ durch Auswertung eines vorliegenden Infrarot-Absorptionsspektrums berechnet, um die annähernde Grösse des zu erwartenden Strahlungsanteils der Wärmeleitfähigkeit für dieses Beispiel bestimmen zu können.

Nach Einführung von $\bar{\kappa}$ ist in (12) als wellenlängenabhängige Grösse nur noch E_r enthalten. Wir schreiben unter Benutzung von (14) gemäss dem Stefan-Boltzmann'schen Gesetz:

$$\left. \begin{aligned} \int_{\lambda=0}^{\infty} E_r d\lambda &= \frac{\sigma}{\pi} \left(T_1^4 - 4T_1^3 \Delta T \frac{\tau}{\pi} \right) \\ \int_{\lambda=0}^{\infty} E_{r1} d\lambda &= \frac{\sigma}{\pi} T_1^4 \\ \int_{\lambda=0}^{\infty} E_{r2} d\lambda &= \frac{\sigma}{\pi} (T_1^4 - 4T_1^3 \Delta T) \end{aligned} \right\} (15)$$

worin

$$\sigma = 5,669 \cdot 10^{-12} \text{ W cm}^{-2} (\text{grd K})^{-4}$$

die Strahlungskonstante bedeutet.

Wird schliesslich (15) in (12) eingeführt, so lässt sich die Integration über η etwas umständlich aber elementar ausführen. Berechnen wir dann durch eine weitere Integration über v und Division durch τ den durch (4) definierten Mittelwert, so ergibt sich:

$$\left. \begin{aligned} \bar{Q}_r &= \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} Q_r dv = \frac{16}{3} \frac{n^2}{\tau} \sigma T^3 \Delta T Y(\epsilon, \tau) \\ Y &= 1 - \frac{3}{4\tau} [1 - 4K_5(\tau)] - \frac{3}{\tau} (1 - \epsilon) \times \\ &\int_{x=0}^1 \frac{[1 - \exp(-\tau/x)]^2}{1 + (1 - \epsilon) \exp(-\tau/x)} x^3 dx \end{aligned} \right\} (16)$$

Darin sei T als mittlere absolute Temperatur festgesetzt, auf die sich die Angabe der Wärmeleitfähigkeit bezieht. K_5 ist eine Funktion der allgemeinen Form

$$K_n(\tau) = \int_0^1 \exp\left(-\frac{\tau}{x}\right) x^{n-2} dx \quad (17)$$

Diese Funktionen sind tabelliert z.B. von E.F.M. van der Held [1].

Haben die beiden Platten unterschiedliche Emissionsgrade ϵ_1 and ϵ_2 , so erhält man an Stelle von Y

$$Y^* = 1 - \frac{3}{4\tau} [1 - 4K_5(\tau)] -$$

$$\frac{3}{\tau} \int_{x=0}^1 \frac{1 - (\epsilon_1 + \epsilon_2)/2 - (1 - \epsilon_1)(1 - \epsilon_2) \exp(-\tau/x)}{1 - (1 - \epsilon_1)(1 - \epsilon_2) \exp(-2\tau/x)} \left[1 - \exp\left(-\frac{\tau}{x}\right) \right]^2 x^3 dx \quad (18)$$

3.2 Diffuse Reflexion

Für diesen Fall wurde die von der wärmeren Platte in die Schicht eindringende Strahlungsströmung von W. Leidenfrost [15] berechnet. Wir haben bereits gezeigt, dass die Strömung an dieser Stelle stets einen kleineren Wert ergeben muss als der durch (4) definierte Strahlungsanteil des Wärmetransportes von Platte zu Platte.

In Anlehnung an das Rechenverfahren von Leidenfrost erhalten wir unter Verwendung von Ausdrücken der Form (17) für die Strahlungsströmung an der Stelle z ausser den beiden bereits in (8) und (9) angegebenen, in der neuen Schreibweise lautenden Ausdrücken:

$$Q_{r1} = 2\pi n^2 \int_{\lambda=0}^{\infty} \int_{\eta=0}^v E_r K_2(v - \eta) d\eta d\lambda \quad (19)$$

und

$$Q_{r2} = -2\pi n^2 \int_{\lambda=0}^{\infty} \int_{\eta=v}^{\tau} E_r K_2(\eta - v) d\eta d\lambda \quad (20)$$

noch die beiden weiteren Anteile

$$Q'_{r3} = 2\pi n^2 \int_{\lambda=0}^{\infty} P_1 K_3(v) d\lambda \quad (21)$$

und

$$Q'_{r4} = -2\pi n^2 \int_{\lambda=0}^{\infty} P_2 K_3(\tau - v) d\lambda \quad (22)$$

Darin bedeuten P_1 und P_2 die gesamten Wärmeströmungen, die durch Emission und infolge von diffus reflektierter Strahlung von den Oberflächen der beiden Platten ausgehen. P_1 und P_2 bestehen aus den Gliedern:

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= \epsilon E_{r1} + 2(1 - \epsilon) \int_{\eta=0}^{\tau} E_r K_2(\eta) d\eta \\ &\quad + 2(1 - \epsilon) P_2 K_3(\tau) \\ P_2 &= \epsilon E_{r2} + 2(1 - \epsilon) \int_{\eta=0}^{\tau} E_r K_2(\tau - \eta) d\eta \\ &\quad + 2(1 - \epsilon) P_1 K_3(\tau) \end{aligned} \right\} (23)$$

Aus (23) werden P_1 und P_2 berechnet und in (21) und (22) eingesetzt.

Durch Summierung von (19), (20), (21) und (22) wird der (12) entsprechende Ausdruck für die gesamte durch Strahlung bedingte Wärmeströmung Q'_r durch die Testebene bei z erhalten. Wird dieser Ausdruck wie im Falle der regulären Reflexion vereinfacht, insbesondere mit Hilfe von (15), so lässt sich auch hier die Integration über η und v ausführen. Als Ergebnis erhält man für den Wärmetransport durch Strahlung von Platte zu Platte für den Fall diffuser Reflexion den folgenden (16) entsprechenden Wert:

$$\left. \begin{aligned} \bar{Q}'_r &= \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} Q'_r dv = \frac{16}{3} \frac{n^2}{\tau} \sigma T^3 \Delta T Y'(\epsilon, \tau) \\ Y' &= 1 - \frac{3}{4\tau} [1 - 4K_5(\tau)] - \\ &\quad \frac{2}{3\tau} (1 - \epsilon) \frac{[1 - 3K_4(\tau)]^2}{1 + 2(1 - \epsilon)K_3(\tau)} \end{aligned} \right\} (24)$$

Haben die Plattenoberflächen unterschiedliche Emissionsgrade ϵ_1 und ϵ_2 , so ergibt sich anstelle von Y' entsprechend (18):

$$\begin{aligned} Y'^* &= 1 - \frac{3}{4\tau} [1 - 4K_5(\tau)] \\ &\quad - \frac{2}{3\tau} \frac{1 - (\epsilon_1 + \epsilon_2)/2 - 2(1 - \epsilon_1)(1 - \epsilon_2)K_3(\tau)}{1 - 4(1 - \epsilon_1)(1 - \epsilon_2)K_3^2(\tau)} \\ &\quad \times [1 - 3K_4(\tau)]^2 \end{aligned} (25)$$

Die in (16) und (24) angegebenen Funktionen Y und Y' wurden für den Bereich $0,01 \leq \tau \leq 100$ für eine Anzahl von Parametern ϵ berechnet und in Tabelle 1 zusammengestellt. Für gleiche Argumente unterscheiden sich die Zahlenwerte der beiden Funktionen nicht erheblich voneinander.

Für Grenzfälle nehmen die beiden Funktionen die folgenden Werte an:

Für hinreichend kleine optische Dicken der Flüssigkeitsschicht:

$$Y_{\tau \rightarrow 0} = Y'_{\tau \rightarrow 0} = \frac{3}{4} \frac{\epsilon}{2 - \epsilon} \tau \quad (26)$$

Für hinreichend grosse optische Dicken:

$$Y_{\tau \rightarrow \infty} = Y'_{\tau \rightarrow \infty} = 1 \quad (27)$$

Für $\epsilon = 1$, d.h. für den Fall, dass die Plattenoberflächen schwarze Strahler sind, ergibt sich:

$$Y_{\epsilon=1} = Y'_{\epsilon=1} = 1 - \frac{3}{4\tau} [1 - 4K_5(\tau)] \quad (28)$$

4. DIE BEIDEN KOEFFIZIENTEN DER WÄRMELEITFÄHIGKEIT

Wird die effektive Wärmeleitfähigkeit k_{eff} definiert als der Wert, den man erhält, wenn man die im stationären Zustand gemessene, von einer Platte zur anderen übergehende Wärmeströmung Q dividiert durch den als Quotienten aus Temperaturdifferenz ΔT und Plattenabstand s_0 berechneten (mittleren) Temperaturgradienten, so ergibt sich aus (3) und (16):

$$\begin{aligned} k_{\text{eff}} &= \frac{Q s_0}{\Delta T} = \frac{(\bar{Q}_c + \bar{Q}_r) s_0}{\Delta T} \\ &= k + \frac{16}{3} \frac{n^2}{\bar{\kappa}} \sigma T^3 Y \end{aligned} (29)$$

Die in der üblichen Weise bestimmte Wärmeleitfähigkeit k_{eff} ist also genau genommen kein Stoffwert, da das zweite Glied rechts in (29) wegen der Funktion Y von der gewählten Schichtdicke und den Strahlungseigenschaften der Plattenoberflächen abhängt.

Nur für hinreichend grosse Schichtdicken nähert sich k_{eff} zufolge (27) einem von der Schichtdicke unabhängigen Höchstwert

$$k_{\text{eff}(s_0 \rightarrow \infty)} = k + \frac{16}{3} \frac{n^2}{\bar{\kappa}} \sigma T^3 \equiv k + k_r \quad (30)$$

Der Stoffwert k_r wird Strahlungsleitfähigkeit genannt.

Für den allgemeinen Fall kann (29) kurz geschrieben werden

$$k_{\text{eff}} = k + Y k_r \quad (31)$$

Tabelle 1. Werte der Funktionen Y (reguläre Reflexionen) und Y' (diffus)

$\frac{l}{\tau}$	Optische Dicke τ	$\epsilon = 0,04$		$\epsilon = 0,2$		$\epsilon = 0,4$
		reg.	diff. Refl.	reg.	diff. Refl.	reg. Refl.
∞	0	0,015306 τ	0,015306 τ	0,083333 τ	0,083333 τ	0,187500 τ
100	0,0100	0,000178	0,000178	0,000857	0,000857	0,001895
90	0,0111	0,000201	0,000201	0,000955	0,000955	0,002108
80	0,0125	0,000230	0,000230	0,001079	0,001079	0,002375
70	0,0143	0,000269	0,000269	0,001239	0,001239	0,002719
60	0,0167	0,000324	0,000324	0,001454	0,001455	0,003180
50	0,0200	0,000405	0,000405	0,001760	0,001762	0,003828
40	0,0250	0,000536	0,000537	0,002229	0,002231	0,004809
30	0,0333	0,000782	0,000783	0,003034	0,003038	0,006463
20	0,0500	0,001372	0,001376	0,004732	0,004746	0,009844
10	0,100	0,003895	0,003921	0,01047	0,01058	0,02051
9	0,111	0,004599	0,004637	0,01191	0,01201	0,02298
8	0,125	0,005560	0,005608	0,01367	0,01387	0,02611
7	0,143	0,006897	0,006974	0,01616	0,01637	0,03020
6	0,167	0,008893	0,009002	0,01941	0,01987	0,03577
5	0,200	0,01201	0,01222	0,02471	0,02511	0,04378
4	0,250	0,01741	0,01782	0,03315	0,03363	0,05616
3	0,333	0,02819	0,02906	0,04842	0,04941	0,07764
2,0	0,500	0,05514	0,05752	0,08307	0,08562	0,1225
1,8	0,556	0,06539	0,06845	0,09552	0,09873	0,1378
1,6	0,625	0,07891	0,08291	0,1115	0,1156	0,1570
1,4	0,714	0,09725	0,10257	0,1327	0,1380	0,1816
1,2	0,833	0,1230	0,1302	0,1615	0,1686	0,2141
1,1	0,909	0,1399	0,1483	0,1800	0,1882	0,2344
1,0	1,000	0,1605	0,1704	0,2022	0,2117	0,2584
0,9	1,111	0,1860	0,1977	0,2292	0,2402	0,2869
0,8	1,250	0,2178	0,2317	0,2623	0,2751	0,3212
0,7	1,429	0,2582	0,2745	0,3035	0,3183	0,3629
0,6	1,667	0,3100	0,3289	0,3553	0,3720	0,4141
0,5	2,000	0,3773	0,3983	0,4211	0,4394	0,4774
0,4	2,500	0,4641	0,4862	0,5044	0,5233	0,5555
0,3	3,333	0,5753	0,5955	0,6088	0,6259	0,6510
0,2	5,000	0,7077	0,7233	0,7314	0,7445	0,7611
0,10	10,00	0,8530	0,8610	0,8650	0,8717	0,8800
0,09	11,11	0,8677	0,8749	0,8785	0,8845	0,8920
0,08	12,50	0,8824	0,8888	0,8920	0,8973	0,9040
0,07	14,29	0,8971	0,9027	0,9055	0,9102	0,9160
0,06	16,67	0,9118	0,9166	0,9190	0,9230	0,9280
0,05	20,00	0,9265	0,9305	0,9325	0,9358	0,9400
0,04	25,00	0,9412	0,9444	0,9460	0,9487	0,9520
0,03	33,33	0,9559	0,9583	0,9595	0,9615	0,9640
0,02	50,00	0,9706	0,9722	0,9730	0,9743	0,9760
0,01	100,00	0,9853	0,9861	0,9865	0,9872	0,9880
0	∞	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Da für einen festen Wert des effektiven Absorptionskoeffizienten $\bar{\kappa}$, also für einen gegebenen Stoff, τ proportional der Schichtdicke s_0 ist, so ergibt sich aus dem Verlauf der Funktion Y und (31), dass eine Messung von k_{eff} in Abhängigkeit von der Schichtdicke eine bei k beginnende und mit s_0 ansteigende Kurve ergibt, die schliesslich in die horizontale Gerade $k + k_r$ einmündet. Ist der Emissionsgrad der Plattenoberflächen bekannt, so können k , k_r und $\bar{\kappa}$ aus dieser Messkurve bestimmt werden, indem man sie so berechnet, dass der Teil der Messkurve, für den ein Einfluss von Konvektion ausgeschlossen werden kann, mit den berechneten Werten unter Benutzung von (29) möglichst gut dargestellt werden kann.

Für den Grenzfall, dass das zwischen den Platten befindliche Medium keine Strahlung absorbiert, folgt aus (26) und (29):

$$k_{\text{eff}}(\bar{\kappa}=0) = k + 4 \frac{\epsilon}{2 - \epsilon} n^2 \sigma T^3 s_0 \quad (32)$$

Für ein solches Medium steigt also k_{eff} linear mit der Schichtdicke an.

Für den Grenzfall sehr grosser Absorption ergibt (29): $k_{\text{eff}} = k$. Es ist interessant zu untersuchen, wie der Strahlungsterm in (29) von der Grösse der Strahlungsabsorption in der Flüssigkeitsschicht abhängt. (29) lässt sich schreiben

$$k_{\text{eff}} = k + \frac{16}{3} n^2 \sigma T^3 s_0 \frac{Y}{\tau} \quad (33)$$

Wählt man z.B. die festen Werte $T = 25^\circ\text{C}$, die Dicke der Flüssigkeitsschicht $s_0 = 1 \text{ mm}$ und den Brechungsindex $n = 1,5$ und berechnet nach (33) den Strahlungsterm als Funktion von $\bar{\kappa}$ für verschiedene Werte von ϵ , so erhält man die Diagramme der Abb. 3. Wird $\bar{\kappa}$ in mm^{-1} ausgedrückt, so ist $\bar{\kappa}$ für dieses Beispiel numerisch gleich τ . Daher wurde als Abszisse τ gewählt.

Wie man sieht, nimmt nur für grosse Werte von ϵ das Strahlungsglied von k_{eff} stets mit wachsendem $\bar{\kappa}$ ab. Für kleine Werte von ϵ hingegen, wie man sie bei den Platten der Messapparaturen mit ihren metallisch blanken Oberflächen hat, nimmt das Strahlungsglied zunächst mit wachsendem Absorptionskoeffizienten zu. Für einen Apparat mit blanken

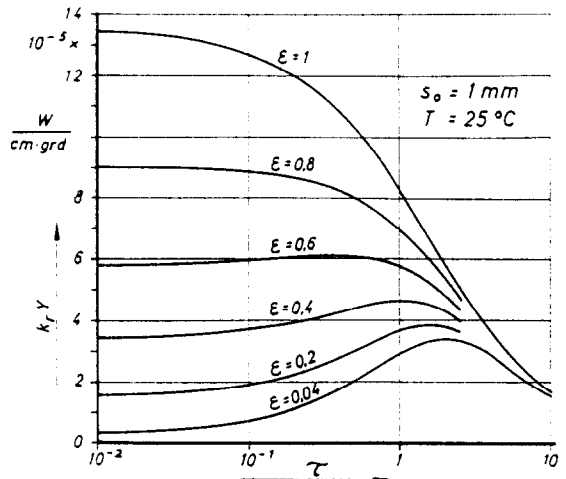


ABB. 3. Strahlungsanteil der effektiven Wärmeleitfähigkeit in Abhängigkeit von der optischen Dicke der Flüssigkeitsschicht.

Kupferplatten mit einem Emissionsgrad von 0,04 hat das Strahlungsglied der effektiven Wärmeleitfähigkeit bei einem Absorptionskoeffizienten von etwa $\bar{\kappa} = 2 \text{ mm}^{-1}$ einen etwa 12 mal so grossen Wert wie für ein völlig durchlässiges Medium. Nimmt man für k einen Wert von $1 \times 10^{-3} \text{ W cm}^{-1} \text{ grad}^{-1}$ an, wie es etwa für CCl_4 zutrifft, so bedeutet das, dass der Strahlungsanteil für unser Beispiel etwa 4 Prozent der effektiven Wärmeleitfähigkeit betragen könnte. Ein solcher Anteil würde durch genaue Messungen nachweisbar sein. Bereits bei einem Wert des Absorptionskoeffizienten von 2 mm^{-1} haben sich—infolge des Übergewichts der inneren Strahlung der Flüssigkeit die Kurven für die verschiedenen Werte von ϵ einander angenähert. Der Einfluss des Emissionsvermögens der Plattenoberflächen auf den Strahlungsanteil der effektiven Wärmeleitfähigkeit ist dort also nicht mehr sehr gross.

Dieses Ergebnis kommt natürlich durch das Übergewicht des Leitungsanteils der Wärmeleitfähigkeit und den dadurch bedingten Verlauf des Temperaturabfalls zwischen den Platten zustande. Wäre nur ein Wärmetransport durch Strahlung vorhanden, so würde dieser für ein absorbierendes Medium stets kleiner sein als für ein völlig durchlässiges.

5. UNTERSUCHUNG EINES BEISPIELS

Zur Beantwortung der Frage, ob der Strahlungsanteil bei einer verhältnismässig schwach absorbierenden Flüssigkeit von messbarer Grösse ist, wurde durch Auswertung einer Aufnahme der Infrarot-Absorption von Toluol ein Mittelwert für den Absorptionskoeffizienten berechnet. Mit Rücksicht auf (29) erfolgte die Berechnung mit Hilfe der Formel:

$$\frac{1}{\bar{\kappa}} = \frac{\int_0^{\infty} (E_r/\kappa) d\lambda}{\int_0^{\infty} E_r d\lambda} = \frac{\int_0^{\infty} (E_r/\kappa) d\lambda}{(\sigma/\pi) T^4} \quad (34)$$

Streng genommen ist diese Mittelung nur für Schichten von hinreichend grosser optischer Dicke zulässig, da bei endlichen Schichtdicken der Randeinfluss umso grösser wird, je kleiner κ für den betreffenden Wellenlängenbereich ist. Eine genauere Mittelung wäre unter Verwendung der Funktion Y möglich. Aus dem Verlauf der Absorptionskurve lässt sich jedoch abschätzen, dass die Mittelung (34) mit Rücksicht auf die aus messtechnischen Gründen erforderliche Mindestgrösse der Schichtdicken zu einem Wert für $\bar{\kappa}$ führt, dessen Genauigkeit für die beabsichtigte Abschätzung der Grösse des Strahlungsterms völlig ausreichend ist.

Zur Verminderung der für die Bestimmung von $\bar{\kappa}$ erforderlichen Rechenarbeit benutzen wir die Funktionstafeln zum Planck'schen Strahlungsgesetz von Czerny und Walther [16]. Als Bezugstemperatur wurde mit Rücksicht auf die eigenen Wärmeleitfähigkeitsmessungen 25°C gewählt. Das IR-Absorptionsspektrum des Toluols wurde für den Wellenlängenbereich $2 \mu\text{m} \leq \lambda \leq 25 \mu\text{m}$ aufgenommen. Für den oberhalb $25 \mu\text{m}$ liegenden Anteil von 13 Prozent der Gesamtstrahlung wurde die Absorption geschätzt.

Als Ergebnis der Berechnung ergab sich ein Wert von $\bar{\kappa} = 3,5 \text{ mm}^{-1}$.

Für die Wärmeleitfähigkeit von Toluol wurde von Riedel [17] bei einer Schichtdicke von 1 mm bei 20°C der Wert $1,35 \cdot 10^{-3}$, bei 80°C der Wert $1,19 \cdot 10^{-3} \text{ W cm}^{-1} \text{ grd}^{-1}$ erhalten.

Nimmt man für die begrenzenden Oberflächen spiegelnde Reflexion und einen Emissionsgrad von 0,04, für das Toluol eine Brechungs-

zahl von 1,5 an und benutzt man den oben errechneten Wert für $\bar{\kappa}$, wobei $\bar{\kappa}$ im Bereich von 20 bis 80°C als konstant angesehen werden soll, so erhält man mit (29) und Tabelle 1 für die wahre Wärmeleitfähigkeit

$$k_{20} = 1,32 \text{ W cm}^{-1} \text{ grd}^{-1};$$

$$k_{80} = 1,14 \cdot 10^{-3} \text{ W cm}^{-1} \text{ grd}^{-1}$$

Mit diesen Werten wurde für beide Temperaturen und für die Emissionsgrade $\epsilon = 0,04$ und $\epsilon = 1$ die effektive Wärmeleitfähigkeit in Abhängigkeit von der Schichtdicke berechnet. Aus dem Ergebnis wurde weiterhin der Temperaturkoeffizient α ebenfalls als Funktion der Schichtdicke bestimmt nach der Formel

$$\alpha = \frac{k_{\text{eff } 80} - k_{\text{eff } 20}}{60} \text{ W cm}^{-1} \text{ grd}^{-2} \quad (35)$$

Die Ergebnisse der Berechnungen sind in den Abb. 4 und 5 dargestellt. Hiernach kann die effektive Wärmeleitfähigkeit für grosse Schichtdicken bei 20°C um 3,7 Prozent, bei 80°C um

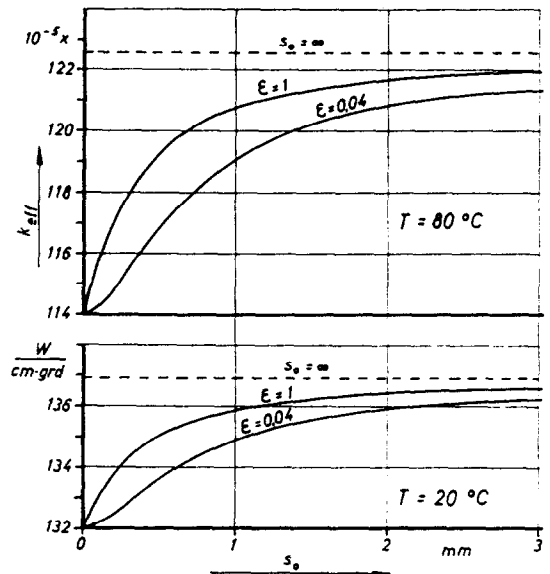


ABB. 4. Berechnete effektive Wärmeleitfähigkeit von Toluol in Abhängigkeit von der Dicke der Flüssigkeitsschicht.

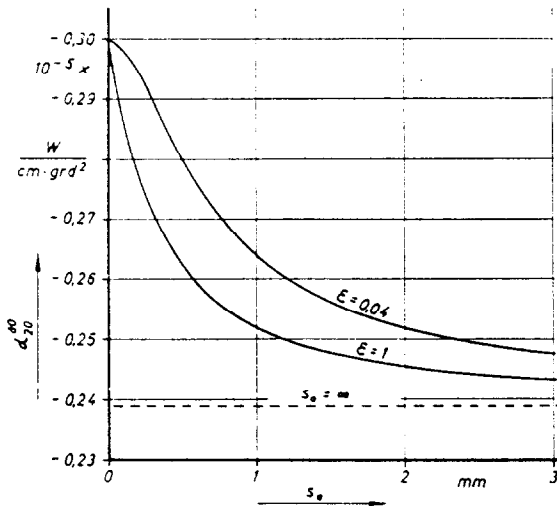


Abb. 5. Berechneter effektiver Temperaturkoeffizient der Wärmeleitfähigkeit von Toluol in Abhängigkeit von der Dicke der Flüssigkeitsschicht.

7,5 Prozent über der wahren Wärmeleitfähigkeit liegen, und der Absolutwert des effektiven Temperaturkoeffizienten zwischen 20 und 80°C ist für grosse Schichtdicken 20 Prozent kleiner als derjenige des wahren Temperaturkoeffizienten.

Es erscheint interessant auszurechnen, wie gross die von der wärmeren Platte in die Flüssigkeitsschicht eintretende, durch Strahlung bewirkte Wärmeströmung ist, wenn man die für Toluol benutzten Werte $\bar{\kappa} = 3,5 \text{ mm}^{-1}$ und $n = 1,5$, eine Temperatur von 20°C, eine Schichtdicke von 1 mm und einen Emissionsgrad $\epsilon = 0,04$ für die Plattenoberflächen annimmt. Dazu setzt man in den einzelnen Gliedern von (12) $v = 0$ und führt unter Benutzung der auch für die Berechnung von \bar{Q}_r gewählten Vereinfachungen in $Q_r(v=0)$ die Integration über η aus. Als Ergebnis erhält man, dass $Q_r(v=0)$ für dieses Beispiel etwa 30 mal so klein ist wie der Mittelwert \bar{Q}_r über die Schichtdicke.

Es erscheint möglich, mit Hilfe eines iterativen Verfahrens den Strahlungsanteil des Wärmetransports zwischen den Platten genauer zu berechnen, indem man von dem hier gewonnenen Wert ausgeht. Hierzu wird Q_r aus (12) für eine hinreichende Anzahl von Punkten v berechnet und mit diesen Werten unter Berücksichtigung

von (1) und (2) eine genauere Temperaturverteilung nach Art der Kurve *b*, Abb. 1 festgelegt. Hieraus kann dann ein verbesserter Wert für \bar{Q}_r berechnet werden. Es lässt sich abschätzen, dass diese Verbesserung für Flüssigkeiten unmessbar klein ist.

Meinem verbindlichsten Dank Ausdruck geben möchte ich Herrn Dr.-Ing. W. Fritz, Leitendem Direktor und Professor bei der Physikalisch-Technischen Bundesanstalt für die freundliche Förderung dieser Arbeit, Herrn Dr. M. Kohler, o. Prof. für theoretische Physik an der TH Braunschweig, für die sorgfältige Überprüfung meiner theoretischen Berechnungen, Herrn Dr. H. H. Kirchner, PTB, für seine Bereitwilligkeit, eine für meine Zwecke geeignete Aufnahme des IR-Absorptions-Spektrums des Toluols anzufertigen und schliesslich Herrn Techn. Reg. Obersekretär R. Jugel, PTB, für seine ständige umsichtige und loyale Hilfe bei meinen Arbeiten.

LITERATUR

1. E. F. M. VAN DER HELD, *Appl. Sci. Res.* A3, 237 (1952); A4, 77 (1953).
2. L. GENZEL, *Z. Phys.* 135, 177 (1953).
3. A. WALTHER, J. DÖRR und E. EDLER, *Glastechn. Ber.* 26, 133 (1953).
4. R. VISKANTA und R. J. GROSH, *Trans. Amer. Soc. Mech. Engrs* C84, 63 (1962).
5. J. D. VERSCHOOR und P. GREEBLER, *Trans. Amer. Soc. Mech. Engrs* 74, 961 (1952).
6. E. F. M. VAN DER HELD, *Allg. Wärmetechnik* 4, 236 (1953).
7. B. K. LARKIN und ST. W. CHURCHILL, *J. Amer. Inst. Chem. Engrs* 5, 467 (1959).
8. W. F. CAMMERER, *Wärme* 68, 8 (1961).
9. H. POLTZ, *Allg. Wärmetechnik* 11, 64 (1962).
10. M. CZERNY und L. GENZEL, *Glastechn. Ber.* 25, 134 (1952); 25, 387 (1952); 30, 1 (1957).
11. W. GEFFCKEN, *Glastechn. Ber.* 25, 392 (1952); 29, 42 (1956).
12. L. GENZEL, *Glastechn. Ber.* 26, 69 (1953).
13. M. CZERNY, L. GENZEL und G. HEILMANN, *Glastechn. Ber.* 28, 185 (1955).
14. M. F. DICK und D. W. MCCREADY, *Trans. Amer. Soc. Mech. Engrs* 76, 831 (1954).
15. W. LEIDENFROST, *Int. J. Heat Mass Transfer* 7, 447 (1964).
16. M. CZERNY und A. WALTHER, *Tabellen der Bruchteilfunktionen zum Planck'schen Strahlungsgesetz*, Springer, Berlin (1961).
17. L. RIEDEL, *Chem. Ing. Techn.* 23, 321 (1951).
18. W. FRITZ und H. POLTZ, Absolutbestimmung der Wärmeleitfähigkeit von Flüssigkeiten—I. Kritische Versuche an einer neuen Plattenapparatur, *Int. J. Heat Mass Transfer* 5, 307 (1962).

Abstract—The radiative component of the heat transfer through an absorbing medium being between two emitting and reflecting parallel plates is given by the mean value of the radiant heat flux between the plate surfaces. This component was calculated for conditions existing in general at measurements of the thermal conductivity of liquids by a steady state method and at temperatures non extreme. The contribution of radiation may at room temperature amount to some percentage of the total heat transfer even for very weakly emitting plate surfaces. This was shown for toluene by evaluating a measured diagram of the infra-red absorption of this liquid.

Résumé—La composante de rayonnement du transport de chaleur à travers un milieu absorbant placé entre deux plaques parallèles émettrices et réfléchissantes est donnée par la valeur moyenne du flux de chaleur de rayonnement entre les surfaces des plaques. Cette composante a été calculée pour des conditions existant en général dans les mesures de la conductivité thermique des liquides par une méthode stationnaire et à des températures non extrêmes. La contribution du rayonnement peut, à la température ambiante, se monter à quelques pour cent du transport total de chaleur même pour des surfaces de plaque faiblement émettrices. Ceci a été montré pour le toluène en utilisant les valeurs du diagramme expérimental de l'absorption infrarouge de ce liquide.

Аннотация—Вклад лучистой составляющей при теплообмене через поглощающую среду, заключенную между двумя излучающими и отражающими параллельными пластинами, представлен средней величиной потока теплового излучения между обеими поверхностями. Эта составляющая подсчитывается для условий, обычно имеющих место при измерениях теплопроводности жидкостей в стационарных условиях при не слишком высоких температурах. При комнатной температуре радиационная доля теплообмена может составлять несколько процентов от общего потока теплопроводности даже для весьма слабо излучающих поверхностей. В этом убеждают расшифровки диаграмм измерений инфракрасного поглощения в толуоле.